Staatsexamen VWO

Voorbeeldexamen

Wiskunde D

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen. Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen. Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formulekaart

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

Correlatie en regressie

De correlatiecoëfficiënt: $R=\dfrac{\mathrm{Covar}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$

Regressielijn van Y op X: $Y=aX+b$ met $a=R\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

Regressielijn van X op Y: $X=pY+q$ met $q=R\cdot\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ $\quad a\cdot p=R^2$

Meetkunde

De volgende definities en eigenschappen mogen zonder bewijs gebruikt worden bij het oplossen van de opgaven.

hoeken en lijnen
Gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, bissectrice, middelloodlijn, middenparallel

driehoeken
Hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; hoogtelijn driehoek, zwaartelijn driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, gelijkbenige rechthoekige driehoek, Pythagoras

vierhoeken
Hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant

cirkel
Koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, koordenvierhoek

kegelsneden
Raaklijneigenschappen van parabool, ellips en hyperbool

Houten Kratten

Een bedrijf in maakt lage houten kratten die je kunt gebruiken als opbergruimte.
Het grondvlak van deze kratten is 300 mm breed en 400 mm lang.

De hoogte van deze kratten is normaal verdeeld. De hoogte is gemiddeld 135 mm en de standaarddeviatie is 2 mm.

De hoogte van 200 lage kratten wordt gemeten.

3p **1** Bereken met behulp van de vuistregels voor de normale verdeling hoeveel van deze kratten naar verwachting een hoogte hebben tussen 133 mm en 139 mm.

Het bedrijf maakt ook hoge houten kratten.
Het grondvlak van deze kratten is ook 300 mm breed en 400 mm lang waardoor de verschillende kratten kunnen worden gestapeld.

De hoogte van de hoge kratten is ook normaal verdeeld. De hoogte is gemiddeld 230 mm en de standaardafwijking is 3 mm.

Er worden vier lage en één hoog krat op elkaar gestapeld.

3p **2** Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat de totale hoogte van deze stapel groter is dan 772 mm.

Ook een ander bedrijf levert deze kratten. Een consumentenorganisatie denkt dat bij dit bedrijf veel van de hoge kratten minder dan 230 mm hoog zijn.
Bij een steekproef wordt van 100 van deze kratten de hoogte gemeten.
De gemiddelde hoogte van een krat in de steekproef is 229,4 mm.

4p **3** Onderzoek of de kratten significant vaak minder dan 230 mm hoog zijn.
Neem als significantieniveau 5%.

Vlakken

Gegeven zijn de vlakken $V: 4x - y + 3z = 5$ en $W: x - 5z = 10$.

3p **4** Bereken in hele graden nauwkeurig de hoek die de vlakken V en W met elkaar maken.

De punten die even ver van vlak V als vlak W liggen, vormen met elkaar twee vlakken. Deze vlakken worden de **bissectricevlakken** genoemd van V en W.

3p **5** Stel vergelijkingen op van de bissectricevlakken van V en W.

Viervlakdobbelsteen

Een viervlakdobbelsteen is een piramidevormige dobbelsteen.
De vier zijvlakken zijn (even grote) gelijkzijdige driehoeken.
Bij elk van de punten van de piramide staat een ogenaantal.
Je kunt de ogenaantallen 1 t/m 4 gooien.
Het ogenaantal dat je gooit is het ogenaantal dat bij de punt hoort die omhoog wijst.

Amira gooit 8 keer met een viervlakdobbelsteen en noteert bij iedere worp het aantal ogen dat zij gooit. Amira blijkt in de 8 worpen elk ogenaantal 2 keer te hebben gegooid.

3p **6** Bereken op hoeveel manieren dit kan gebeuren.

Bert gooit met de viervlakdobbelsteen totdat hij 2 keer 4 ogen heeft gegooid.

4p **7** Bereken de kans dat hij dan 6 keer moet gooien.

Chenille gooit een aantal keer met de viervlakdobbelsteen.

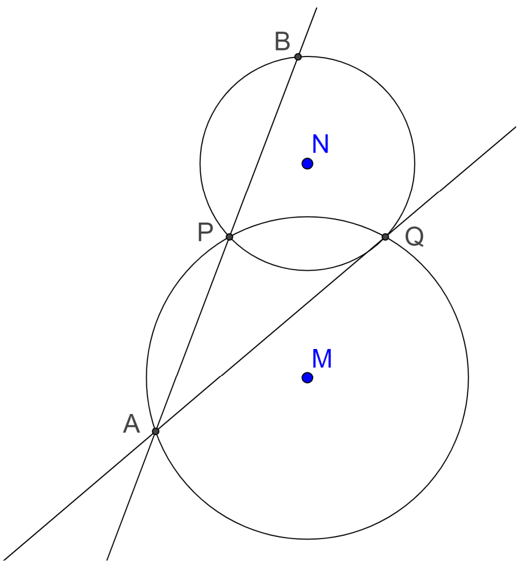
5p **8** Hoe vaak moet Chenille met de dobbelsteen gooien zodat de kans dat zij minstens 1 keer 4 ogen gooit groter is dan 0,95?

Twee cirkels

Gegeven zijn twee cirkels met middelpunten M en N die elkaar snijden in de punten P en Q.

Door het punt A, dat op de cirkel met middelpunt M ligt, worden de lijnen AP en AQ getekend. De lijn AP snijdt de cirkel met middelpunt N in het punt B.

Zie de figuur, die ook op de uitwerkbijlage te vinden is.



Stel $\angle BAQ = \alpha$ en $\angle ABQ = \beta$.

6p **9** Bewijs dat $\angle AQB = \angle MPN$.

Complexe functie

Gegeven is de functie $f(z) = z^2$.

3p **10** Teken in het complexe vlak het beeld van $|z| \leq 2 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq Arg(z) \leq \frac{1}{4}\pi$.

Gegeven zijn de complexe getallen waarvan het reële deel gelijk is aan 1.
Dus $z = 1 + b\text{i}$

3p **11** Bereken $f(1+b\text{i})$ en schets het beeld van $\text{Re}(z) = 1$

Gegeven zijn de complexe getallen waarvan het imaginaire deel gelijk is aan 4.
Dus $z = a + 4\text{i}$.

4p **12** Welke van deze getallen worden afgebeeld op de imaginaire as?

4p **13** Bereken exact de oplossingen van de vergelijking $(z-\text{i})^2 = -4$.
Geef de antwoorden in de vorm $z = p + q\text{i}$.

Bevolking van Nederland

In de eerste decennia van de 20e eeuw groeide de bevolking van Nederland exponentieel. Op 1 januari 1900 telde Nederland nog 5 miljoen inwoners, op 1 januari 1970 waren dat er al 13 miljoen. We noemen het aantal inwoners van Nederland in deze periode $N(t)$, met t in jaren na 1 januari 1900.

4p **14** Stel een recursieve formule op voor $N(t)$ en bereken met deze formule in welk jaar Nederland voor het eerst meer dan 10 miljoen inwoners telde.

Voor de groei van de Nederlandse bevolking in de 21e eeuw geldt een logistisch groeimodel. Hierbij gaan we uit van de volgende gegevens:

- Op 1 januari 2000 waren er 15,93 miljoen inwoners;
- Het aantal inwoners nam in het jaar 2000 met 80 duizend toe;
- Het aantal inwoners groeit naar een grenswaarde van 20 miljoen.

De recursieve formule bij het discrete dynamische model voor logistische groei is:

$$\begin{cases} N(t) = N(t-1) + a \cdot N(t-1)\left(20 - N(t-1)\right) \\ N(0) = 15{,}93 \end{cases}$$

2p **15** Toon met behulp van de bovenstaande gegevens aan dat $a = 0{,}001234$.

3p **16** Bereken in welk jaar volgens het logistisch groeimodel Nederland meer dan 19 miljoen inwoners zal tellen.

De logistische groei van het aantal inwoners van Nederland kan ook worden beschreven met een continu dynamisch model, de differentiaalvergelijking:

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (20 - N(t))$$

De eerste stappen bij het oplossen van deze differentiaalvergelijking zijn:

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = c \cdot N \cdot (20 - N)$$

$$(2) \quad \frac{1}{N \cdot (20 - N)} dN = c \cdot dt$$

$$(3) \quad \left(\frac{0{,}05}{N} + \frac{0{,}05}{20 - N}\right) dN = c \cdot dt$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking is:

$$N = \frac{20}{1 + e^{-20ct - 20d}}$$

5p **17** Toon aan dat deze oplossing uit stap (3) volgt.

Met behulp van de gegevens:

- Op 1 januari 2000 waren er 15,93 miljoen inwoners;
- Het aantal inwoners nam in het jaar 2000 met 80 duizend toe;
- Het aantal inwoners groeit naar een grenswaarde van 20 miljoen.

kan de oplossing van de differentiaalvergelijking worden geschreven in de vorm:

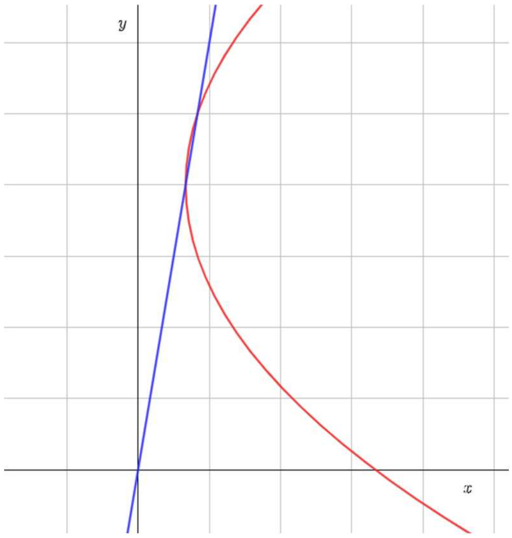
$$N = \frac{20}{1 + A \cdot e^{Bt}}$$

3p **18** Bereken de waarden van *A* en *B* in vier decimalen nauwkeurig.

Parabool en raaklijn

Gegeven is de parabool $y^2 + 2ay = 6x + 5a$.
In figuur 1 is de parabool getekend voor een bepaalde waarde van a.

Ook is de lijn met de vergelijking $y = 6x$ getekend.



figuur 1

4p **19** Bereken voor welke twee waarden van a de top van de parabool op de lijn $y = 6x$ ligt.

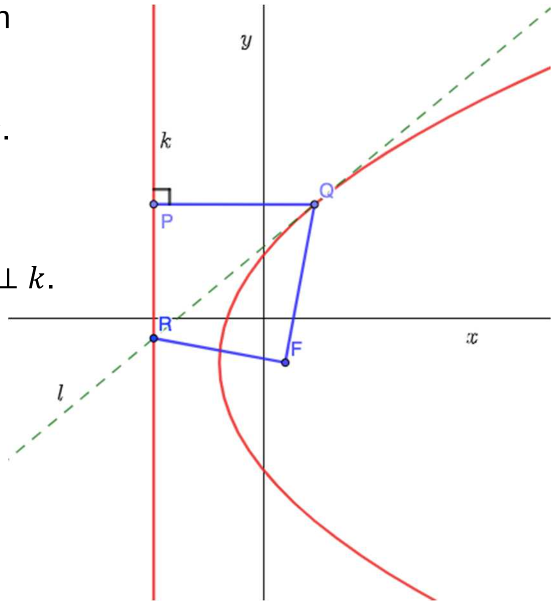
In figuur 2 is de parabool getekend voor een andere waarde van a.

De parabool heeft brandpunt F en richtlijn k.

De lijn l raakt de parabool in punt Q.

Punt P ligt op de richtlijn k zodanig dat: $PQ \perp k$.

Lijn l snijdt de richtlijn k in punt R.



figuur 2

5p **20** Bewijs dat vierhoek $PQFR$ een koordenvierhoek is.

einde ■